第13章 复变函数的级数与留数定理

- 复变函数项级数
- 泰勒级数
- 洛朗级数
- 留数与留数定理

13.1 复变函数项级数

1.复数项级数

2. 复变函数项级数

3.幂级数的运算和性质

13.1 复变函数项级数

13.1.1复数列极限

定义13.1.1 设$\{\alpha_n\}(n=1,2,\cdots,n)$为一复数列，

其中$\alpha_n=a_n+ib_n$，α为一确定的复数，若对任给

$\varepsilon>0$存在自然数N，当$n>N$时恒有$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$

则称α为复数列$\{\alpha_n\}$当$n\to\infty$时的极限，

记作$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ 也称复数列$\{\alpha_n\}$收敛于α，

或称$\{\alpha_n\}$收敛；否则称$\{\alpha_n\}$发散。

类似于复函数极限:

定理1.1.1 设$\alpha_n = a_n + ib_n, n = 1,2,\cdots,\ \alpha = a + ib,$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

定义1.1.2 设$\{\alpha_n\}$ $(n = 1,2,\ \cdots)$为一复数列，其中

$\alpha_n = a_n + ib_n$，表达式$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$

称为复数项(无穷)级数，简称级数，其前n项之和

$s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 称为该级数的(前n项)

部分和. 如果$\{s_n\}$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛

并称极限$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$为该级数的和；

如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$不收敛，则称发散。

由于 $s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$

$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + i(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

$= A_n + iB_n,$

由定理1可知，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A + iB$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A, \quad \lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = A + iB \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

定理1.1.2 设$\alpha_n = a_n + ib_n (n = 1, 2, \ldots)$, a_n与b_n为实数,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛$\Leftrightarrow$级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛.

定理2将复数项级数的审敛问题转化为实数项级数的审敛问题, 而由实数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛的必要条件为 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0$,可得

推论(必要条件) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛, 则$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$。

定理1.1.3（充分条件）若$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$也收敛

证明　设$\alpha_n = a_n + ib_n (n = 1, 2, \ldots)$,

因$|a_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |\alpha_n|$，由正项级数比较判别法知

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛．同理$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛，

故$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛。

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$为**绝对收敛**，

若$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$为**条件收敛**

例1 下列级数是否收敛？若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$

解 (1)因 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数绝对收敛。

(2)因为$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故级数不会绝对收敛

但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots)+i(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots)$

其中实部和虚部都是交错级数均收敛，

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$收敛，故原级数条件收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$

因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+i\frac{1}{n^2})$

且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

由定理2知原级数发散。

设$\alpha_n=a_n+ib_n(n=1,2,\ldots)$, a_n与b_n为实数,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛$\Leftrightarrow$级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛.

2.复变函数项级数

定义1.1.3 设 $\{f_n(z)\}$ $(n=1,2,\cdots)$为一复变函数序列，其中各项在区域D内有定义，表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \tag{13.1}$$

称为区域D上的复变函数项级数，简称级数。其前n项之和

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

称为该级数的前n项部分和. 若 $z_0 \in D$，且

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z_0) = S(z_0)$$

则该级数在 z_0收敛，而 $S(z_0)$称为它的和。

如果级数(13.1)在D内处处收敛，那么它在D内各点的和构成D内的一个函数$S(z)$：

$$S(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots,$$

$S(z)$称为级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$的**和函数**。

例如，级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}+\cdots$

对区域$D:|z|<1$内的每个z都收敛到$\dfrac{1}{1-z}$，

成立的关键原因：$\lim_{n\to\infty} z_0{}^n=\lim_{n\to\infty} r^n e^{in\theta}$

$=\lim_{n\to\infty} r^n \cos n\theta+i\lim_{n\to\infty} r^n \sin n\theta=0$　　当$|z|<1$时

所以$S(z)=\dfrac{1}{1-z}$是级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$在区域$|z|<1$内的和函数。

定义1.1.4

若$f_n(z)=c_{n-1}(z-z_0)^{n-1}$, 则级数(13.1)为

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+c_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+\cdots \tag{13.2}$$

称此级数为**幂级数**，特别地，当 $z_0=0$ 时，上式写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots \tag{13.3}$$

如果$\zeta=z-z_0$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\zeta^n$ 就是级数(13.3)的形式。为了方便，下面就级数(13.3)来讨论。

类似于实变量幂级数的结论，我们有如下定理：

定理1.1.4(Abel定理) 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 \quad (\neq 0)$

收敛，则对满足$|z| < |z_0|$ 的z，该幂级数必**绝对收敛**；若在 $z = z_0$ 发散，则对满足$|z| > |z_0|$的z，该幂级数必**发散**。

Abel定理的几何意义：若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在$z = z_0 \quad (\neq 0)$

收敛，则在以原点为中心，半径为$|z_0|$的圆内，级数必绝对收敛；若级数在z_0发散，则在以原点为中心，半径为$|z_0|$的圆外，级数也发散。

定义1.1.5 若存在圆$|z|=R$，级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在圆内绝对收敛，而在圆外发散，则称圆域$|z|<R$为级数的收敛圆盘(或收敛圆域)，圆周$|z|=R$称为该级数的收敛圆，$R$称为收敛半径。

例如级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$，当$|z|<1$时绝对收敛，而当$|z|\geq 1$时，由于$n\to\infty$时级数的一般项z^n不趋于零，故级数发散，因此级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$的收敛圆域为$|z|<1$，收敛半径为1。

关于幂级数(13.3)收敛半径的求法，我们有：

定理1.1.5(比值法)

如果$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\rho$，那么级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$的收敛半径:

定理1.1.6(根值法)

如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\rho$，那么级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$的收敛半径:

(1) 则当$\rho\neq 0$时,$R=\dfrac{1}{\rho}$; (2) 当$\rho=0$时,$R=+\infty$;

(3) 当$\rho=+\infty$时，$R=0$.

例 2　求级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$的收敛半径，并讨论它们在收敛圆周上的敛散性。

解

这三个级数都有$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1$，故收敛半径

都为1，但它们在收敛圆周上的敛散性却不一样。

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在$|z| = 1$上，由于$\lim_{n\to\infty} z^n \neq 0$，故处处发散；

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 在$|z| = 1$上的$z = -1$处收敛，$z = 1$处发散；

例 2　求级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$的收敛半径，并讨论它们在收敛圆周上的敛散性。

解

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 在$|z| = 1$上处处绝对收敛，因而处处收敛。

由此例可见，在收敛圆周上的情况较复杂，只能对具体级数进行具体分析。

3.幂级数的运算和性质

与实变量幂级数类似，复变量幂级数也能进行加、减、乘运算。

结论 1　设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ |z|<r_1$ $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n,\ |z|<r_2,$

则 $$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)z^n,\ |z|<R$$

$$f(z)\cdot g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots a_n b_0)z^n,\ |z|<R$$

其中$R=\min\{r_1,r_2\}$

更为重要的是：幂级数可进行如下代换(复合)运算。

结论2　如果当$|z|<r$时，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，

又设在$|z|<R$内$g(z)$解析且满足$|g(z)|<r$，

则当$|z|<R$时，

$$f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[g(z)\right]^n$$

代换运算是函数展为幂级数的常用方法，以下例子说明如何应用。

例 4 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表示成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 a 与 b 是不相等的复常数。

解 把 $\dfrac{1}{z-b}$ 变形为如下形式

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

视 $\dfrac{z-a}{b-a}=g(z)$，当 $\left|\dfrac{z-a}{b-a}\right|<1$ 时，

由等比级数得 $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^n$

例 4 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表示成形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 a 与 b 是不相等的复常数。

由等比级数得 $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^n$

$$\frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

当 $\left|\dfrac{z-a}{b-a}\right|<1$ 时，级数收敛，

即 $|z-a|<|b-a|$

定理1.1.7

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$的收敛半径为$R$，则

（1）其和函数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$在收敛圆域$|z-z_0|<R$内解析；

（2）在收敛圆域内，其和函数可逐项求导：

即$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z-z_0)^{n-1}$

（3）在收敛圆域内，其和函数可逐项求积，即

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$$

例 5　将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展成z的幂级数。

解　　因为当$|z|<1$时，$\dfrac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$

两边求导可得

$$-\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1},$$

$$\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} nz^{n-1},\ |z|<1$$